== 通分と最小公倍数 ==

≪解説≫

○　通分と最小公倍数

　幾つかの分数を分母の等しい分数に変形することを「通分」といいます。分母の異なる分数の足し算や引き算を行うためには、先に通分しておく必要があります。

　分数を正しく変形するには、分母と分子に同じ数を掛けなければなりません。それぞれの分数は次の原理によって変形します。

$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$ …（分母と分子に同じ数Cを掛ける。）

例

$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$

$\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{3}{15}$

　上の例では、分母の異なる2つの分数$\frac{2}{3}$と$\frac{1}{5}$が、分母の等しい2つの分数$\frac{10}{15}$と$\frac{3}{15}$に変形されている（通分できている）ことが分かります。

○1　単純な通分の方法

$\frac{2}{3}, \frac{1}{5} \rightarrow \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}, \frac{3\cdot 1}{3\cdot 5}$

のように、

(1)　「分母だけを見比べて」足りない数字を掛ける。

$\frac{2}{3}$を考えるときは、分母に5が足りないと考える。

$\frac{1}{5}$を考えるときは、分母に3が足りないと考える。

※この通分の方法は、「分母を掛けたものを共通分母にする」というのと同じことです。

(2)　掛けるときは「分子」にも同じ数を掛ける。

$\frac{2}{3}$の分母に5を掛けるときは、分子にも5を掛ける。

$\frac{1}{5}$の分母に3を掛けるときは、分子にも3を掛ける。

※○1の方法で「通分はできます」が、この方法は「無駄が多い」ので小中学校ではあまり薦めていません。

　たとえば、次の例1のように2つの分母に共通な約数がないときは、この仕方で無駄なくできますが、例2のように2つの分母に共通の約数があるときは、「単純に分母を掛けたものを共通分母にする」方法では無駄があり、もっと小さな数字で共通分母を作ることができます。

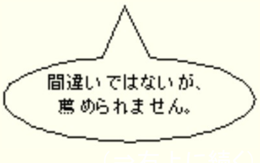
例1

$\frac{3}{5}, \frac{4}{7} \rightarrow \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}, \frac{5\cdot 4}{5\cdot 7} \rightarrow \frac{21}{35}, \frac{20}{35}$

例2

$\frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rightarrow \frac{2\cdot 6}{3\cdot 6}, \frac{3\cdot 5}{3\cdot 6} \rightarrow \frac{12}{18}, \frac{15}{18}$

（ $\frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ の方がよい。）



○　分母が6と10（$2\cdot 3$と$2\cdot 5$）になっている2つの分数があるときを考えると、これらの分母には「共通のもの」2と「独自のもの」3, 5があります。このような2つの数について

「共通のもの」・「独自のもの1」・「独自のもの2」

を作ると「全部のもの」をそろえることができます。これが「最小公倍数」と呼ばれるものです。

※単純に、$6\cdot 10=2\cdot 3\cdot 2\cdot 5=60$を作ると、共通のものを重複して掛けることになり大きくなり過ぎるのです。

【最小公倍数の求め方】

　2つの正の整数A, Bの最大公約数（＝共通の約数で最も大きいもの）をG、最小公倍数をLで表すと

$A=G\cdot A'$, $B=G\cdot B'$　（A', B'には公約数はない）

と書けます。

　このとき、最小公倍数は

$L=G\cdot A'\cdot B'$

で求められます。

（単純に2つ掛けたもの：$A\cdot B=G\cdot G\cdot A'\cdot B'$では、共通のもの（最大公約数）$G$を重複して掛けるので無駄があるのです。これに対して、最小公倍数を求めるときは、最大公約数を1回だけ掛けます。）

例

(1)　2つの正の整数15, 21の「共通に割れるもの」は3なので、$15=3\cdot 5$, $21=3\cdot 7$と書けます。（5, 7にはもう共通に割り切れるものが1以外にないので、3が最大公約数になります。）

　そこで最小公倍数は

$L=3\cdot 5\cdot 7=105$

で求められます。

(2)　このとき、

$\frac{4}{15}, \frac{5}{21}$

のように15, 21が分母となっている分数を通分するには、105を共通分母にすればよいことになります。

$\frac{4}{15}, \frac{5}{21} \rightarrow \frac{4}{3\cdot 5}, \frac{5}{3\cdot 7} \rightarrow \frac{4\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}, \frac{5\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 7}$

$\rightarrow \frac{28}{105}, \frac{25}{105}$

○2　最小公倍数を共通分母にする方法

　左で述べた○1の場合も含めて、次のようにまとめることができます。

(0)　初めに、分母に共通に割り切れるもの（＝最大公約数）を見つける。「最大公約数」「独自のもの1」「独自のもの2」を掛けたものが最小公倍数で、これを分母にする。

(1)　「元の分母から新しい分母にするために」それぞれ足りない数字を掛ける。

(2)　掛けるときは「分子」にも同じ数を掛ける。

例1

$\frac{5}{12}, \frac{9}{10}$を通分するには

(1) 分母の12, 10は2で割り切れるので、$12=2\cdot 6$, $10=2\cdot 5$に分けられます。（6, 5には、公約数がないことを確かめておきます。詳しい内容は、中3で素因数分解という項目で習います。）

(2) 共通分母を$2\cdot 6\cdot 5=60$にする。このとき、分母にそれぞれ5, 6を掛けることになります。

(3) 分子ににもそれぞれ5, 6を掛けて

$\frac{5}{12}, \frac{9}{10} \rightarrow \frac{25}{60}, \frac{54}{60}$ …（できあがり）

例2

$\frac{5}{18}, \frac{7}{30}$を通分するには

(1) 分母の18 , 30 は2 で割り切れますが、
$18=2\cdot 9$, $30=2\cdot 15$ とすると、まだ9 , 15 に公約数3 がありますので、3 でも割って、$18=6\cdot 3$, $30=6\cdot 5$ にします。(3 , 5 には、公約数がないことを確かめておきます。)
(2) 共通分母を$6\cdot 3\cdot 5=90$ にします。このとき、分母にそれぞれ5 , 3 を掛けることになります。
(3) 分子にもそれぞれ5 , 3 を掛けて
$\frac{5}{18}, \frac{7}{30} \rightarrow \frac{25}{90}, \frac{21}{90}$ …(できあがり)

≪問題≫
　次の分数を(なるべく小さな正の整数を分母にして)通分してください。答は問題に対応するように並べてください。
(Internet Explorer以外のブラウザをお使いの場合は，漢字変換モードを外して半角数字で入力してください．)

(1) $\frac{3}{5}, \frac{2}{7} \rightarrow \frac{21}{35}, \frac{10}{35}$
採点する やり直す

○○
○○

5 , 7 には1 以外に共通に割り切れるものがないので、$5\cdot 7=35$ が最小公倍数。
$\rightarrow \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}, \frac{5\cdot 2}{5\cdot 7} \rightarrow \frac{21}{35}, \frac{10}{35}$

(2) $\frac{7}{6}, \frac{3}{14} \rightarrow \frac{49}{42}, \frac{9}{42}$
採点する やり直す

○○
○○

6 , 14 は2 で割り切れる(2 は公約数)ので、$6=2\cdot 3$, $14=2\cdot 7$ と書ける。
このとき、3 , 7 には共通の約数が(1以外に)ないので、2 が最大公約数。
最小公倍数は$L=2\cdot 3\cdot 7=42$
$\rightarrow \frac{7\cdot 7}{6\cdot 7}, \frac{3\cdot 3}{14\cdot 3} \rightarrow \frac{49}{42}, \frac{9}{42}$

(3) $\frac{3}{7}, \frac{5}{14} \rightarrow \frac{6}{14}, \frac{5}{14}$
採点する やり直す

○○
○○

7 , 14 は7 で割り切れて、7 が最大公約数。
$7=1\cdot 7$, $14=2\cdot 7$ により、最小公倍数は$L=7\cdot 1\cdot 2=14$
(この問題のように一方が他方で割り切れるときは、小さい方が最大公約数、大きい方が最小公倍数になる。)
$\frac{3\cdot 2}{7\cdot 2}, \frac{5}{14} \rightarrow \frac{6}{14}, \frac{5}{14}$

(4) $\frac{1}{42}, \frac{1}{105} \rightarrow \frac{5}{210}, \frac{2}{210}$
採点する やり直す

○○
○○

42 , 105 は3 , 7 で割り切れて、21 が最大公約数。
$42=21\cdot 2$, $105=21\cdot 5$ により、最小公倍数は
$L=21\cdot 2\cdot 5=210$
$\rightarrow \frac{1\cdot 5}{42\cdot 5}, \frac{1\cdot 2}{105\cdot 2} \rightarrow \frac{5}{210}, \frac{2}{210}$

(5) $\frac{5}{12}, \frac{1}{20} \rightarrow \frac{25}{60}, \frac{3}{60}$
採点する やり直す

○○
○○

12 , 20 は4 で割り切れて、4 が最大公約数。(2 だけではありません)
$12=4\cdot 3$, $20=4\cdot 5$ により、最小公倍数は$L=4\cdot 3\cdot 5=60$
$\rightarrow \frac{5\cdot 5}{12\cdot 5}, \frac{1\cdot 3}{20\cdot 3} \rightarrow \frac{25}{60}, \frac{3}{60}$