

== 通分と最小公倍数 ==

＜解説＞

○ 通分と最小公倍数

幾つかの分数を分母の等しい分数に変形することを「通分」といいます。分母の異なる分数の足し算や引き算を行うためには、先に通分しておく必要があります。

分数を正しく変形するには、分母と分子に同じ数を掛けなければなりません。それぞれの分数は次の原理によって変形します。

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC} \dots (\text{分母と分子に同じ数 } C \text{ を掛ける。})$$

例

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{15}$$

上の例では、分母の異なる2つの分数 $\frac{2}{3}$ と $\frac{1}{5}$ が、分母の等しい2つの分数 $\frac{10}{15}$ と $\frac{3}{15}$ に変形されている(通分できている)ことがわかります。

○1 単純な通分の方法

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{5} \rightarrow \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}, \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 5}$$

のように、

(1) 「分母だけを見比べて」足りない数字を掛ける。

$\frac{2}{3}$ を考えるときは、分母に5が足りないと考え。

$\frac{1}{5}$ を考えるときは、分母に3が足りないと考え。

※この通分の方法は、「分母を掛けたものを共通分母にする」というのと同じことです。

(2) 掛けるときは「分子」にも同じ数を掛ける。

$\frac{2}{3}$ の分母に5を掛けるときは、分子にも5を掛ける。

$\frac{1}{5}$ の分母に3を掛けるときは、分子にも3を掛ける。

※○1の方法で「通分はできます」が、この方法は「無駄が多い」ので小中学校ではあまり薦めていません。

たとえば、次の例1のように2つの分母に共通な約数がないときは、この仕方では無駄なくできますが、例2のように2つの分母に共通の約数があるときは、「単純に分母を掛けたものを共通分母にする」方法では無駄があり、もっと小さな数字で共通分母を作ることができます。

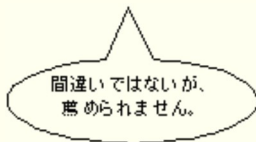
例1

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{7} \rightarrow \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7}, \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 7} \rightarrow \frac{21}{35}, \frac{20}{35}$$

例2

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rightarrow \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6}, \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6} \rightarrow \frac{12}{18}, \frac{15}{18}$$

($\frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ の方がよい。)



○ 分母が6と10(2・3と2・5)になっている2つの分数があるときを考えると、これらの分母には「共通のもの」2と「独自のもの」3, 5があります。このような2つの数について

「共通のもの」「独自のもの」「独自のもの2」

を作ると「全部のもの」をそろえることができます。これが「最小公倍数」と呼ばれるものです。

※単純に、 $6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$ を作ると、共通のものを重複して掛けることになり大きくなり過ぎるのです。

【最小公倍数の求め方】

2つの正の整数A, Bの最大公約数(=共通の約数で最も大きいもの)をG、最小公倍数をLで表すと

$$A = G \cdot A', B = G \cdot B' \quad (A', B' \text{ には公約数はない})$$

と書けます。

このとき、最小公倍数は

$$L = G \cdot A' \cdot B'$$

で求められます。

(単純に2つ掛けたもの $A \cdot B = G \cdot G \cdot A' \cdot B'$ では、共通のもの(最大公約数)Gを重複して掛けるので無駄があるので。これに対して、最小公倍数を求めるときは、最大公約数を1回だけ掛けます。)

例

(1) 2つの正の整数15, 21の「共通に割れるもの」は3なので、 $15 = 3 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$ と書けます。(5, 7にはもう共通に割り切れるものが1以外にないので、3が最大公約数になります。)

そこで最小公倍数は

$$L = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

で求められます。

(2) このとき、

$$\frac{4}{15}, \frac{5}{21}$$

のように15, 21が分母となっている分数を通分するには、105を共通分母にすればよいことになります。

$$\frac{4}{15}, \frac{5}{21} \rightarrow \frac{4}{3 \cdot 5}, \frac{5}{3 \cdot 7} \rightarrow \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$\rightarrow \frac{28}{105}, \frac{25}{105}$$

○2 最小公倍数を共通分母にする方法

左で述べた○1の場合も含めて、次のようにまとめることができます。

(0) 初めに、分母に共通に割り切れるもの(=最大公約数)を見つめる。「最大公約数」「独自のもの1」「独自のもの2」を掛けたものが最小公倍数で、これを分母にする。

(1) 「元の分母から新しい分母にするために」それぞれ足りない数字を掛ける。

(2) 掛けるときは「分子」にも同じ数を掛ける。

例1

$$\frac{5}{12}, \frac{9}{10} \text{ を通分するには}$$

(1) 分母の12, 10は2で割り切れるので、 $12 = 2 \cdot 6$, $10 = 2 \cdot 5$ に分けられます。(6, 5には、公約数がないことを確かめておきます。詳しい内容は、中3で素因数分解という項目で習います。)

(2) 共通分母を $2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$ にする。このとき、分母にそれぞれ5, 6を掛けることになります。

(3) 分子にもそれぞれ5, 6を掛けて

$$\frac{5}{12}, \frac{9}{10} \rightarrow \frac{25}{60}, \frac{54}{60} \dots (\text{できあがり})$$

例2

$$\frac{5}{18}, \frac{7}{30} \text{ を通分するには}$$

(1) 分母の18, 30は2で割り切れますが、
 $18=2 \cdot 9$, $30=2 \cdot 15$ とすると、まだ9, 15に公約数3がありますので、3でも割って、 $18=6 \cdot 3$, $30=6 \cdot 5$ にします。(3, 5には、公約数がないことを確かめておきます。)

(2) 共通分母を $6 \cdot 3 \cdot 5=90$ にします。このとき、分母にそれぞれ5, 3を掛けることになります。

(3) 分子にもそれぞれ5, 3を掛けて

$$\frac{5}{18}, \frac{7}{30} \rightarrow \frac{25}{90}, \frac{21}{90} \dots (\text{できあがり})$$

《問題》

次の分数を(なるべく小さな正の整数を分母にして)通分してください。答は問題に対応するように並べてください。

(Internet Explorer以外のブラウザをお使いの場合は、漢字変換モードを外して半角数字で入力してください。)

(1) $\frac{3}{5}, \frac{2}{7} \rightarrow \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

採点する やり直す

(2) $\frac{7}{6}, \frac{3}{14} \rightarrow \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

採点する やり直す

(3) $\frac{3}{7}, \frac{5}{14} \rightarrow \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

採点する やり直す

(4) $\frac{1}{42}, \frac{1}{105} \rightarrow \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

採点する やり直す

(5) $\frac{5}{12}, \frac{1}{20} \rightarrow \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

採点する やり直す