== 最大公約数と最小公倍数 ==

○　最大公約数，最小公倍数とは

2つ以上の正の整数に共通な約数（公約数）のうち最大のものを最大公約数といいます．

例　12 と 18 の公約数は，$1,2,3,6$ で，6 が最大公約数

2つ以上の正の整数の共通な倍数（公倍数）のうち最小のものを最小公倍数といいます．

例　2 と 3 の公倍数は，$6,12,18,24,...$ で，6 が最小公倍数

○　最大公約数，最小公倍数の求め方

この頁では，求め方を3通り紹介する．（中学校では，[III]は扱わない）

まず，最大公約数を次のいずれかの方法で求める．
- [I]　共通に割れるだけ割っていく方法
- [II]　素因数分解を利用して共通な指数を探す方法
- [III]　ユークリッド互除法による方法

[I][II]では最小公倍数を求める方法も示されるが，[III]のように最大公約数だけが求まるときは，右の関係式を用いて最小公倍数も求まる．

※最小公約数という言葉は使う値打ちがありません．なぜなら，公約数のうち一番小さい（正の）数は 1 に決まっているからです．

※最大公倍数は決められません．なぜなら，大きな（正の）公倍数は，次の例で分かるように限りなくあるからです．

例　2 と 3 の公倍数　：　$6, 12, 18, 24, 30, 36, ...$

○　2数 A, B の最大公約数を G 最小公倍数を L とおくと，

$$AB=GL$$

が成り立つ．

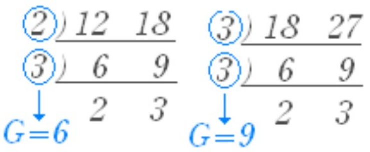
（証明）
$A=A'G$, $B=B'G$ とおく．
（A', B' は互いに素）
$L=A'B'G$ だから $AB=GL$

例
$12=2\cdot 6$, $18=3\cdot 6$
（2, 3 は互いに素，6 は最大公約数）
$L=2\cdot 3\cdot 6=36$
このとき，
$AB=2\cdot 6\cdot 3\cdot 6=GL$

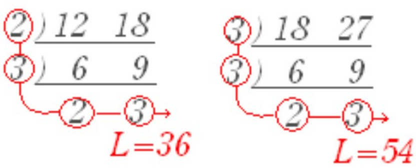
[I]　共通に割れるだけ割っていく方法

最大公約数を求める1つの方法は，共通な数で割れるだけ割っていく方法です．
このとき，共通に割れる数の積が最大公約数です．
最小公倍数を求める方法は，これと同様ですが，割った数と残った数を掛けます．

例　次の例で，$12, 18$ の最大公約数は 6，$18, 27$ の最大公約数は 9 です．



また，$12, 18$ の最小公倍数は 36，$18, 27$ の最小公倍数は 54 です．



【問題1】
2数 $42, 28$ の最大公約数 G，最小公倍数 L を求めてください．（正しい組合せを選んでください．）

1　$G=2, L=1176$	2　$G=7, L=70$
3　$G=14, L=84$	4　$G=14, L=168$

○　HELP

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 42, & 28 \\ \hline 7 & 21, & 14 \\ \hline & 3 & 2 \end{array}$$

$G=2\times 7=14$
$L=2\times 7\times 3\times 2=84$

→ 3

【問題2】
2数 $60, 72$ の最大公約数 G，最小公倍数 L を求めてください．（正しい組合せを選んでください．）

1　$G=12, L=60$	2　$G=12, L=360$
3　$G=60, L=360$	4　$G=60, L=4320$

○　HELP

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 60, & 72 \\ \hline 6 & 30, & 36 \\ \hline & 5 & 6 \end{array}$$

$G=2\times 6=12$
$L=2\times 6\times 5\times 6=360$

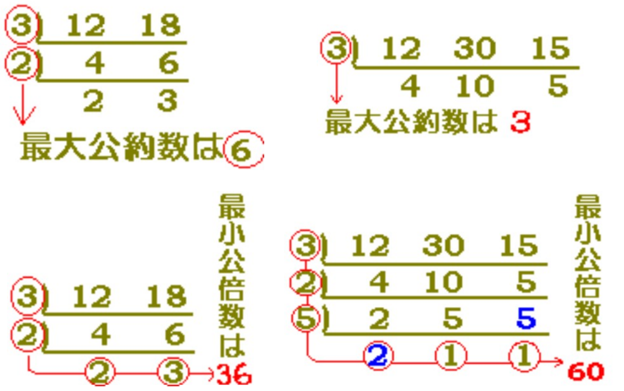
→ 2

3つ以上の数について最大公約数と最小公倍数を求めるときは，「共通に割れる」という言葉の意味が変わります．最大公約数を求めるときには，「全部に共通」に割り切れなければ進んではい

【問題3】
次の計算をもとにして，3数 $24, 36, 54$ の最大公約数を求め

けませんが，最小公倍数を求めるときには，「一部でも割れたら割り」，他はそのまま残します．

例



てください．

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24,\ 36,\ 54 \\ \hline 3 & 12,\ 18,\ 27 \\ \hline & \ \ 4\quad 6\quad 9 \end{array}$$

$\boxed{1}$ 2　$\boxed{2}$ 3　$\boxed{3}$ 6　$\boxed{4}$ 12　$\boxed{4}$ 36

○ HELP

$G=2\times3=6$

→ 3

【問題4】

次の計算は，3数$4, 6, 9$の最小公倍数を求める計算の途中経過を示したものです．x, yに当てはまる数を答えてください．

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4,\ 6,\ 9 \\ \hline 2 & x,\ 2,\ 3 \\ \hline & 2\quad 1\quad y \end{array}$$

$\boxed{1}$ $x=4/3, y=3/2$　$\boxed{2}$ $x=1, y=1$

$\boxed{3}$ $x=2, y=3$　$\boxed{4}$ $x=4, y=3$

○ HELP

6と9が3で割り切れるので，各々2と3にしますが，そのとき4は3で割り切れないので，4のまま下げます．

$x=4$

4と2が2で割り切れるので，各々2と1にしますが，そのとき3は2で割り切れないので，3のまま下げます．

$y=3$

→ 4

[II]　素因数分解を利用して共通な指数を探す方法

最大公約数，最小公倍数を求めるもう1つの方法は，素因数分解を利用する方法です．高校では通常この方法が用いられます．

○ 最大公約数を求めるには，
「共通な素因数に」「一番小さい指数」をつけます．

（指数とは，5^2 の^2 のように累乗を表わす数字のことです．）

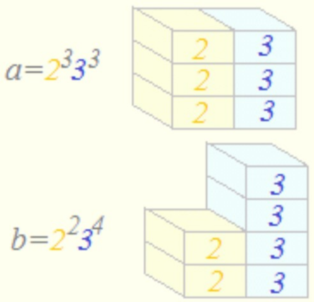
（解説）

例えば，$a=216$, $b=324$ の最大公約数を求めるには，

最初に，a, b を素因数分解して，

$a=2^3 3^3$, $b=2^2 3^4$

の形にします．

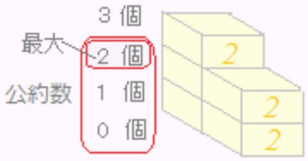


◇ 素因数2について，2^3と2^2の

「公約数」は，$1, 2, 2^2$

「最大公約数」は，2^2

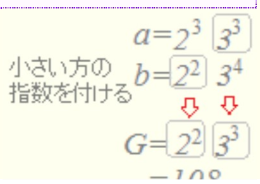
このように，公約数の中で最大のものは，2^3と2^2のうちの，小さい方の指数^{2}を付けたものになります！



「最大公約数」
⇒「共通な素因数に最小の指数」を付けます

◇ 同様にして，素因数3について，3^3と3^4の

「公約数」は，$1, 3, 3^2, 3^3$



○ 最小公倍数を求めるには，
「全部の素因数に」「一番大きな指数」をつけます．

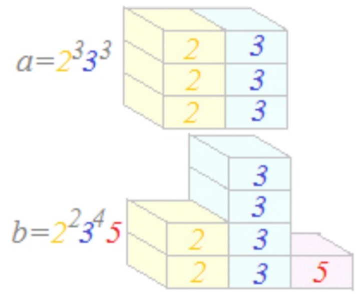
（解説）

例えば，$a=216$, $b=1620$ の最小公倍数を求めるには，

最初に，a, b を素因数分解して，

$a=2^3 3^3$, $b=2^2 3^4 5$

の形にします．



◇ 素因数2について，2^3と2^2の

「公倍数」は両方の倍数になっている数だから，2^3が入るものでなければなりません．

「公倍数」は$2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots$

「最小公倍数」は2^3

◇ 同様にして，素因数3について，3^3と3^4の

「公倍数」は，$3^4, 3^5, 3^6, 3^7, \ldots$

「最小公倍数」は，3^4

◇ ところが，素因数5については，aには入っていなくてbには入っています．この場合に，両方の倍数になるためには，5の倍数でなければなりません．

「公倍数」は$5, 5^2, 5^3, \ldots$

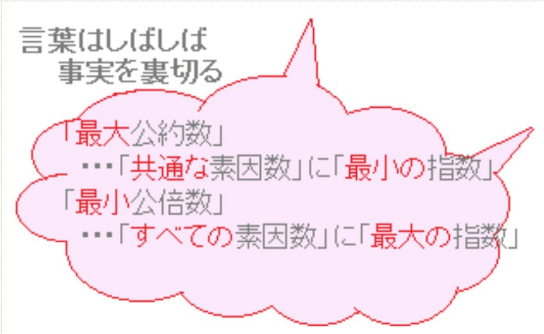
「最小公倍数」は5

◇ 結局，$a=2^3 3^3$, $b=2^2 3^4 5$ の最小公倍数は$2^3 3^4 5=3240$

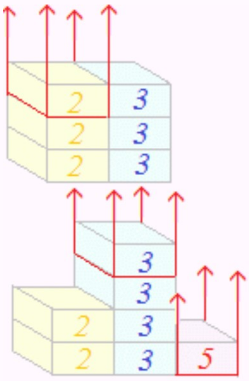
$=108$

「最大公約数」は，
3^3

◇ 結局，$a=2^3 3^3$, $b=2^2 3^4$ の最大公約数は$2^2 3^3=108$



このように，公倍数の中で最小のものは，
◇2^3 と2^2 のうちで大きい方の指数^3 を付けたもの
◇3^3 と3^4 のうちで大きい方の指数^4 を付けたもの
◇素因数5 については，ないもの5^0 と1つあるもの5^1 のうちで大きい方の指数^1 を付けたもの
となります．



⇒素因数5 の場合を考えてみると，「最小公倍数」を作るためには，「すべての素因数」を並べなければならないことがわかります．

「最小公倍数」⇒「すべての素因数に最大の指数」を付けます

【例題1】
$a=75$ と$b=315$ の最大公約数G，最小公倍数L を求めてください．

（解答）
はじめに，a, b を素因数分解します．
$a=3\times5^2$
$b=3^2\times5\times7$
最大公約数を求めるためには，「共通な素因数」3, 5 に「最小の指数」^{1}, ^{1} を付けます．
$G=3^1\times5^1=15$
最小公倍数を求めるためには，「すべての素因数」3, 5, 7 に「最大の指数」^{2}, ^{2}, ^{1} を付けます．
$L=3^2\times5^2\times7=1575$

【例題2】
$a=72$ と$b=294$ の最大公約数G，最小公倍数L を求めてください．

（解答）
はじめに，a, b を素因数分解します．
$a=2^3\times3^2$
$b=2^1\times3^1\times7^2$
最大公約数を求めるためには，「共通な素因数」2, 3 に「最小の指数」^{1}, ^{1} を付けます．
$G=2^1\times3^1=6$
最小公倍数を求めるためには，「すべての素因数」2, 3, 7 に「最大の指数」^{3}, ^{2}, ^{2} を付けます．
$L=2^3\times3^2\times7^2=3528$

【問題5】
2数20, 98 の最大公約数G と最小公倍数L を求めてください．

1 $G=2$, $L=490$　2 $G=2$, $L=980$

3 $G=4$, $L=49$　4 $G=4$, $L=70$　5 $G=4$, $L=490$

○ HELP

はじめに，素因数分解します．
$20=2^2\times5$
$98=2^1\times\ 7^2$
最大公約数を求めるためには，「共通な素因数」2 に「最小の指数」^{1} を付けます．
$G=2^1=2$
最小公倍数を求めるためには，「すべての素因数」2, 5, 7 に「最大の指数」^{2}, ^{1}, ^{2} を付けます．
$L=2^2\times5^1\times7^2=980$
→ 2

【問題6】
2数$a=2^2\times3^3\times5^2$, $b=2^2\times3^2\times7$ の最大公約数G と最小公倍数L を求めてください．（指数表示のままで答えてください）

1 $G=2^2\times3^2$, $L=2^4\times3^5$

2 $G=2^2\times3^3$, $L=2^4\times3^5$

3 $G=2^2\times3^2$, $L=2^2\times3^3\times5^2\times7$

4 $G=2^2\times3^2\times5^2\times7$, $L=2^4\times3^5\times5^2\times7$

○ HELP

最大公約数を求めるためには，「共通な素因数」2, 3 に「最小の指数」^{2}, ^{2} を付けます．
$G=2^2\times3^2$
最小公倍数を求めるためには，「すべての素因数」2, 3, 5, 7 に「最大の指数」^{2}, ^{3}, ^{2}, ^{1} を付けます．
$L=2^2\times3^3\times5^2\times7$
→ 3