

== 最大公約数と最小公倍数 ==

○ 最大公約数, 最小公倍数とは

2つ以上の正の整数に共通な約数(公約数)のうち最大のものを**最大公約数**といいます。

例 12 と 18 の公約数は, 1, 2, 3, 6 で, 6 が最大公約数

2つ以上の正の整数の共通な倍数(公倍数)のうち最小のものを**最小公倍数**といいます。

例 2 と 3 の公倍数は, 6, 12, 18, 24, ... で, 6 が最小公倍数

○ 最大公約数, 最小公倍数の求め方

この頁では, 求め方を3通り紹介する。(中学校では, [III]は扱わない)

まず, 最大公約数を次のいずれかの方法で求める。

- [I] 共通に割れるだけ割っていく方法
- [II] 素因数分解を利用して共通な指数を探す方法
- [III] ユークリッド互除法による方法

[I][II]では最小公倍数を求める方法も示されるが, [III]のように最大公約数だけが求まるときは, 右の関係式を用いて最小公倍数も求める。

※**最小公約数**という言葉は使う値打ちがありません。なぜなら, 公約数のうち一番小さい(正の)数は 1 に決まっているからです。

※**最大公倍数**は決められません。なぜなら, 大きな(正の)公倍数は, 次の例で分かるように限りなくあるからです。

例 2 と 3 の公倍数 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...

○ 2数 A, B の最大公約数を G 最小公倍数を L とおくと,

$$AB=GL$$

が成り立つ。

(証明)

$$A=A'G, B=B'G \text{ とおく。}$$

(A', B' は互いに素)

$$L=A'B'G \text{ だから } AB=GL$$

例

$$12=2 \cdot 6, 18=3 \cdot 6$$

(2, 3 は互いに素, 6 は最大公約数)

$$L=2 \cdot 3 \cdot 6=36$$

このとき,

$$AB=2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6=GL$$

[I] 共通に割れるだけ割っていく方法

最大公約数を求める1つの方法は, 共通な数で割れるだけ割っていく方法です。

このとき, 共通に割れる数の積が最大公約数です。

最小公倍数を求める方法は, これと同様ですが, 割った数と残った数を掛けます。

例 次の例で, 12, 18 の最大公約数は 6, 18, 27 の最大公約数は 9 です。

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \overline{) 12 \quad 18} \\ \textcircled{3} \overline{) \quad 6 \quad 9} \\ \hline \downarrow \\ G=6 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \textcircled{3} \overline{) 18 \quad 27} \\ \textcircled{3} \overline{) \quad 6 \quad 9} \\ \hline \downarrow \\ G=9 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

また, 12, 18 の最小公倍数は 36, 18, 27 の最小公倍数は 54 です。

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \overline{) 12 \quad 18} \\ \textcircled{3} \overline{) \quad 6 \quad 9} \\ \hline \textcircled{2} \textcircled{3} \rightarrow \\ L=36 \end{array} \quad \begin{array}{r} \textcircled{3} \overline{) 18 \quad 27} \\ \textcircled{3} \overline{) \quad 6 \quad 9} \\ \hline \textcircled{2} \textcircled{3} \rightarrow \\ L=54 \end{array}$$

3つ以上の数について最大公約数と最小公倍数を求めるときは, 「共通に割れる」という言葉の意味が変わります。最大公約数を求めるときには, 「全部に共通」に割り切れなければ進んではい

【問題1】

2数42, 28の最大公約数 G , 最小公倍数 L を求めてください。(正しい組合せを選んでください。)

1 $G=2, L=1176$ 2 $G=7, L=70$

3 $G=14, L=84$ 4 $G=14, L=168$

【問題2】

2数60, 72の最大公約数 G , 最小公倍数 L を求めてください。(正しい組合せを選んでください。)

1 $G=12, L=60$ 2 $G=12, L=360$

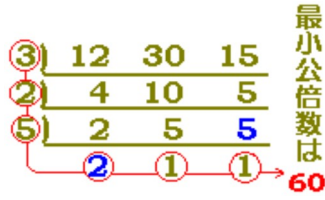
3 $G=60, L=360$ 4 $G=60, L=4320$

【問題3】

次の計算をもとにして, 3数24, 36, 54の最大公約数を求め

けませんが、最小公倍数を求めるときには、「一部でも割れたら割り」、他はそのまま残します。

例



てください。

$$\begin{array}{r} 2) 24, 36, 54 \\ 3) 12, 18, 27 \\ \hline 4 \quad 6 \quad 9 \end{array}$$

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 12 ④ 36

【問題4】

次の計算は、3数4, 6, 9の最小公倍数を求める計算の途中経過を示したものです。x, yに当てはまる数を教えてください。

$$\begin{array}{r} 3) 4, 6, 9 \\ 2) x, 2, 3 \\ \hline 2 \quad 1 \quad y \end{array}$$

① $x=4/3, y=3/2$ ② $x=1, y=1$

③ $x=2, y=3$ ④ $x=4, y=3$

【00】素因数分解を利用して共通な指数を探す方法

最大公約数、最小公倍数を求めるもう1つの方法は、素因数分解を利用する方法です。高校では通常この方法が用いられます。

- 最大公約数を求めるには、「共通な素因数に」「一番小さい指数」をつけます。

(指数とは、 5^2 の 2 のように累乗を表わす数字のことです。)

(解説)

例えば、 $a=216, b=324$ の最大公約数を求めるには、

最初に、 a, b を素因数分解して、

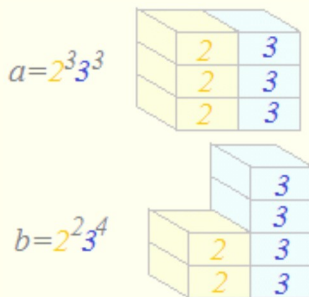
$$a=2^3 3^3, b=2^2 3^4$$

の形にします。

◇ 素因数2について、 2^3 と 2^2 の

「公約数」は、1, 2, 2^2

「最大公約数」は、 2^2



このように、公約数の中で最大のものは、 2^3 と 2^2 のうち、小さい方の指数 2 を付けたものになります！

「最大公約数」
⇒「共通な素因数に最小の指数」を付けます

◇ 同様にして、素因数3について、 3^3 と 3^4 の

「公約数」は、1, 3, $3^2, 3^3$

$$\begin{array}{l} a=2^3 3^3 \\ b=2^2 3^4 \\ \hline \text{小さい方の指数を付ける} \\ G=2^2 3^3 \end{array}$$

- 最小公倍数を求めるには、「全部の素因数に」「一番大きな指数」をつけます。

(解説)

例えば、 $a=216, b=1620$ の最小公倍数を求めるには、

最初に、 a, b を素因数分解して、

$$a=2^3 3^3, b=2^2 3^4 5$$

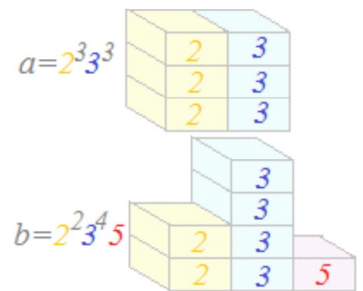
の形にします。

◇ 素因数2について、 2^3 と 2^2 の

「公倍数」は両方の倍数になっている数だから、 2^3 が入るものでなければなりません。

「公倍数」は $2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \dots$

「最小公倍数」は 2^3



◇ 同様にして、素因数3について、 3^3 と 3^4 の

「公倍数」は、 $3^4, 3^5, 3^6, 3^7, \dots$

「最小公倍数」は、 3^4

◇ ところが、素因数5については、 a には入っていないが b には入っています。この場合に、両方の倍数になるためには、5の倍数でなければなりません。

「公倍数」は $5, 5^2, 5^3, \dots$

「最小公倍数」は5

◇ 結局、 $a=2^3 3^3, b=2^2 3^4 5$ の最小公倍数は $2^3 3^4 5=3240$

「最大公約数」は、
 3^3

$$=108$$

◇ 結局、 $a=2^33^3$ 、 $b=2^23^4$ の最大公約数は $2^23^3=108$

言葉はしばしば
事実を裏切る

「最大公約数」
...「共通な素因数」に「最小の指数」
「最小公倍数」
...「すべての素因数」に「最大の指数」

【例題1】

$a=75$ と $b=315$ の最大公約数 G 、最小公倍数 L を求めてください。

(解答)

はじめに、 a, b を素因数分解します。

$$a=3 \times 5^2$$

$$b=3^2 \times 5 \times 7$$

最大公約数を求めるためには、「共通な素因数」3, 5 に「最小の指数」 $1, 1$ を付けます。

$$G=3^1 \times 5^1=15$$

最小公倍数を求めるためには、「すべての素因数」3, 5, 7 に「最大の指数」 $2, 2, 1$ を付けます。

$$L=3^2 \times 5^2 \times 7=1575$$

【例題2】

$a=72$ と $b=294$ の最大公約数 G 、最小公倍数 L を求めてください。

(解答)

はじめに、 a, b を素因数分解します。

$$a=2^3 \times 3^2$$

$$b=2^1 \times 3^1 \times 7^2$$

最大公約数を求めるためには、「共通な素因数」2, 3 に「最小の指数」 $1, 1$ を付けます。

$$G=2^1 \times 3^1=6$$

最小公倍数を求めるためには、「すべての素因数」2, 3, 7 に「最大の指数」 $3, 2, 2$ を付けます。

$$L=2^3 \times 3^2 \times 7^2=3528$$

このように、公倍数の中で最小のものは、

◇ 2^3 と 2^2 のうちで大きい方の指数 3 を付けたもの

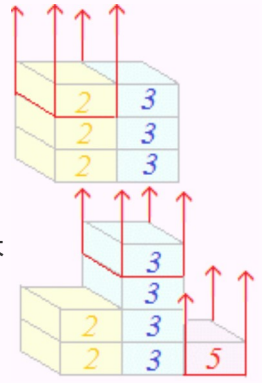
◇ 3^3 と 3^4 のうちで大きい方の指数 4 を付けたもの

◇ 素因数 5 については、ないもの 5^0 と 1 つあるもの 5^1 のうちで大きい方の指数 1 を付けたものとなります。

⇒ 素因数 5 の場合を考えてみる

と、「最小公倍数」を作るためには、「すべての素因数」を並べなければならないことがわかります。

「最小公倍数」⇒「すべての素因数に最大の指数」を付けます



【問題5】

2数 $20, 98$ の最大公約数 G と最小公倍数 L を求めてください。

1 $G=2, L=490$ 2 $G=2, L=980$

3 $G=4, L=49$ 4 $G=4, L=70$ 5 $G=4, L=490$

【問題6】

2数 $a=2^2 \times 3^3 \times 5^2$ 、 $b=2^2 \times 3^2 \times 7$ の最大公約数 G と最小公倍数 L を求めてください。(指数表示のまま答えをください)

1 $G=2^2 \times 3^2, L=2^4 \times 3^5$

2 $G=2^2 \times 3^3, L=2^4 \times 3^5$

3 $G=2^2 \times 3^2, L=2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

4 $G=2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7, L=2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$