

== 2次方程式の解き方 == (まとめ)

○ 2次方程式の解の公式を用いればどんな2次方程式でも解くことができますが、通常「簡単な方法でも解ける問題は、簡単な方法で解く」ようにし、複雑な方法は必要なときだけ使うようにします。

(たとえ話： 植木鉢をいじるには移植ゴテがあれば十分で、スコップやブルドーザーはいりません。山を削るにはスコップでは無理でブルドーザーがよい。)

○ このように、

(A) $x^2=a \rightarrow x=\pm\sqrt{a}$ で解ける問題は、これで解く。

(A)で解けない問題は

(B) 因数分解で解く。

(B)でも解けない問題は

(C) 解の公式で解く。

(中学校の教科書に登場する $(x+a)^2=b$ の形の方程式は、解の公式に吸収されると考えればよく、特に覚える必要はない。)

○ 実際に2次方程式を解くときは、以上の(A)→(B)→(C)の順に検討し、なるべく楽な方法で解くようにします。

(A)

【 x の1次の項がないもの】

$x^2=a \rightarrow x=\pm\sqrt{a}$ のように変形する。

例1

$$x^2=6 \rightarrow x=\pm\sqrt{6}$$

次の例のように根号が簡単になるときは、簡単にしなければならない。

例2

$$x^2=18 \rightarrow x=\pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

次の例のように根号がはずれて整数になるときは、整数にしなければならない。

例3

$$x^2=4 \rightarrow x=\pm\sqrt{4} = \pm 2$$

次の例のように x^2 の係数が1でないときは、その係数で割ってから考える。

例4

$$4x^2=5 \rightarrow x^2=\frac{5}{4} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(B)

【 x の1次の項があるもの】

$$x^2+5x+6=0 \rightarrow (x+2)(x+3)=0$$

$$\rightarrow x+2=0 \text{ または } x+3=0 \rightarrow x=-2 \text{ または } x=-3$$

のように因数分解で解けるときは、因数分解で解く。

※因数分解の符号と解の符号が逆になる点に注意

例5

$$x^2+3x+2=0 \rightarrow (x+1)(x+2)=0$$

$$\rightarrow x+1=0 \text{ または } x+2=0 \rightarrow x=-1 \text{ または } x=-2$$

例6

$$x^2+4x-12=0 \rightarrow (x+6)(x-2)=0$$

$$\rightarrow x+6=0 \text{ または } x-2=0 \rightarrow x=-6 \text{ または } x=2$$

[問題1]

(1) $x^2=11 \rightarrow x=\pm\sqrt{11}$ ○

採点する やり直す 解説

$$x^2=11 \rightarrow x=\pm\sqrt{11}$$

(2) $x^2=12 \rightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$ ○○

採点する やり直す 解説

$$x^2=12 \rightarrow x=\pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{2^2 \times 3} = \pm 2\sqrt{3}$$

(3) $x^2=25 \rightarrow x=\pm 5$ ○

採点する やり直す 解説

$$x^2=25 \rightarrow x=\pm\sqrt{25} = \pm\sqrt{5^2} = \pm 5$$

(4) $9x^2=7 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$ ○○

採点する やり直す 解説

$$9x^2=7 \rightarrow x^2=\frac{7}{9} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{9}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

[問題2]

(1) $x^2+8x+15=0 \rightarrow x=-5, -3$ ○○
(ただし、小さい順とする)

採点する やり直す 解説

$$x^2+8x+15=0 \rightarrow (x+5)(x+3)=0 \rightarrow x+5=0, x+3=0 \rightarrow x=-5, -3$$

(2) $x^2-7x+12=0 \rightarrow x=3, 4$ ○○
(ただし、小さい順とする)

採点する やり直す 解説

$$x^2-7x+12=0 \rightarrow (x-3)(x-4)=0 \rightarrow x-3=0, x-4=0$$

例7

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$\rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2$$

※次の例で、一方の解 $x=0$ を忘れる答案が多いので注意

例8

$$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x-5) = 0$$


$$\rightarrow x=0 \text{ または } x-5=0 \rightarrow x=0 \text{ または } x=5$$

※ $x^2=5x \rightarrow x=\pm\sqrt{5x}$ などとすると解けなくなる。(右辺にまだ x が残っている.)

$x^2=a \rightarrow x=\pm\sqrt{a}$ の公式は a が定数のときに使う.

※ $x^2-9=0$ のような問題は因数分解で解けるが、 $x^2-8=0$ のような問題を因数分解で解くことは発展学習なので、(A)の方法で解く。[例外]

$\rightarrow x=3,4$


(3) $x^2+x-42=0 \rightarrow x = \boxed{-7}, \boxed{6}$ 

(ただし、小さい順とする)

採点する やり直す 解説

$$x^2+x-42=0 \rightarrow (x+7)(x-6)=0 \rightarrow x+7=0, x-6=0$$


$$\rightarrow x=-7, 6$$

(4) $x^2+10x+25=0 \rightarrow x = \boxed{-5}$ 

採点する やり直す 解説

$$x^2+10x+25=0 \rightarrow (x+5)^2=0 \rightarrow x+5=0$$

$$\rightarrow x=-5 \text{ (重解)} \cdots \text{中学校では重解と書かなくてもよい}$$

(5) $x^2+6x=0 \rightarrow x = \boxed{-6}, \boxed{0}$ 

(ただし、小さい順とする)

採点する やり直す 解説

$$x^2+6x=0 \rightarrow x(x+6)=0 \rightarrow x=0, x+6=0$$

$$\rightarrow x=-6, 0$$

(C)

x の1次の項があるもので、因数分解できないものは解の公式で解く.

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a \neq 0)$$

例9

$$x^2+5x+2=0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

例10

$$3x^2+5x-1=0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2+12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

根号を変形して約分できるものは、約分しなければならない.

例11

$$2x^2-6x+1=0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2-8}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2} \text{ (この約分は間違いやすいので注意)}$$

根号が完全にはずれるものは、±を分けると簡単になるので分けなければならない.


例12

$$2x^2-5x-3=0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2+24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm 7}{4} \rightarrow x = 3, -\frac{1}{2}$$

x^2 の係数が負になっているとき、そのまま計算すると間違いやすいので、両辺に-1を掛けて、符号を変えてから解の公式を使う.


[問題3]

(1) $x^2+7x+5=0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{29}}{2}$ 

採点する やり直す 解説

$$x^2+7x+5=0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4 \times 5}}{2}$$


$$\rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{29}}{2}$$

(2) $7x^2+5x-1=0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{53}}{14}$ 

採点する やり直す 解説

$$7x^2+5x-1=0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4 \times 7 \times (-1)}}{2 \times 7}$$

$$\rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{53}}{14}$$

(3) $4x^2+6x-3=0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{4}$ 

例13

$$-5x^2-6x+3=0 \rightarrow 5x^2+6x-3=0$$

$$\rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2+60}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{96}}{10}$$

$$= \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{10} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$$

式が両辺にあるときや未整理になっているときは、全部左辺に移項してから解の公式を使う。

例14

$$3(x+1)^2=4x^2+x+4 \rightarrow 3x^2+6x+3=4x^2+x+4$$

$$\rightarrow -x^2+5x-1=0 \rightarrow x^2-5x+1=0$$

$$\rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

採点する やり直す 解説

$$4x^2+6x-3=0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4 \times 4 \times (-3)}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{84}}{8} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{21}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{4}$$

(4) $3x^2-5x+2=0 \rightarrow x = \frac{2}{3}, 1$

採点する やり直す 解説

$$3x^2-5x+2=0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2-4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{6} \rightarrow x = \frac{2}{3}, 1$$

(5) $-4x^2+7x-2=0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$

採点する やり直す 解説

$$-4x^2+7x-2=0 \rightarrow 4x^2-7x+2=0$$

$$\rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2-4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$$

(6) $2(x-1)(x+1)=5(x+2)^2 \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{34}}{3}$

採点する やり直す 解説

$$2(x-1)(x+1)=5(x+2)^2 \rightarrow 2x^2-2=5x^2+20x+20$$

$$\rightarrow 3x^2+20x+22=0$$

$$\rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2-4 \times 3 \times 22}}{2 \times 3} = \frac{-20 \pm \sqrt{136}}{6}$$

$$\rightarrow x = \frac{-20 \pm 2\sqrt{34}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{34}}{3}$$