

== 約分と最大公約数 ==

《解説》

○ 約分と公約数

分数の分母と分子が「共通の整数」で割り切れるときに、分母と分子をその共通の整数で割って簡単な数で表すことを「約分」といいます。

このとき、分母と分子に共通な整数を「公約数」といいます。

例

$$\frac{12}{20}$$

の分母20と分子12はいずれも4で割り切れる(→「共通な約数は4」→「4が公約数」)から、分母と分子を各々4で割ると、

$$\frac{3}{5}$$

と書けます。

実際に約分するとき、右の解説(1)のように「最大公約数」で割ると直ちに最終的な答にたどり着きますが、「最大公約数」を急に思いつかないときは(2)のように「公約数」で少しずつ割っていく方法もあります。…リラックスして気楽にやるとよいでしょう。

○ 公約数の見つけ方

・「2」で割り切れる数…1の位の数が0, 2, 4, 6, 8になっていれば、2で割り切れる。

・「3」で割り切れる数…各位の数の和が3で割り切れたら、元の数は3で割り切れる。

例 213の各位の数の和は2+1+3=6になる。ここで、6は3で割り切れるから、213も3で割り切れると考えてよい。(証明は、中学校3年生の頃に習います。)

同様に、111, 789, 342なども3で割り切れます。

・「5」で割り切れる数…1の位の数が0, 5になっていれば、5で割り切れる。

⇒ このほか、7で割り切れる数、11で割り切れる数の見分け方なども小中学生向けの参考書に紹介されていますが、**たくさん覚えるのは大変**なので、上に紹介した**2, 3, 5だけを覚えて**おいて、他は右の解説のように「いろいろ試してみる」とできます。

【秘密の方法】

「速くやる」ことは、「えらゐり」のでもなく、「正しい」のでもありません。多くの生徒は、「速くしようと」間違えます。「ゆっくり、落ち着いて」やるとよくできるようになります。

《問題》

次の分数を約分して簡単にしてください。(「簡単にする」とは、なるべく小さな整数にすることをいいます。)

① $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

採点する やり直す

「公約数」と「最大公約数」

約分は、次のいずれかの方法で行うことができます。

(1) 最大公約数の4を見つけることができるときは、4で分母・分子を割って約分すれば、直ちに答になります。

$$\frac{12}{20} = \frac{12^3}{20^5} = \frac{3}{5}$$

(2) はじめに、公約数の2で約分して見て、まだ割れるかどうか確かめてから、さらに2で約分して、答にします。

12も20も2で割り切れるので、2で約分することもできますが、その場合は「まだ約分できる」ことになります。

$$\frac{12}{20} = \frac{12^6}{20^{10}} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{6^3}{10^5} = \frac{3}{5}$$

※ 中学生向けの問題では、あまり大きな数字は登場しませんので、「最大公約数を正確に求めるには」と緊張しなくてもできます。

(1) 割れる数字で割って行って、それ以上割り切れないようになったら、答にする。

例 $\frac{150}{210} = \frac{150^{15}}{210^5} = \frac{15^5}{21^7} = \frac{5}{7}$

(2) 11, 13, 17, 19などで割り切れるかどうかを調べる方法は、普通は覚えません。これらの数で割り切れるかどうかは、「A: 試しに、割ってみる」「B: 取れるだけ取って、残りで考える」などの方法が考えられます。

Bの例

143と273の公約数を調べたいとき、2, 3, 5, 7のいずれでも割り切れないので、

・11で割り切れるかどうかを調べるには:

143=110+33	273=220+53
110→11で割り切れる	220→11で割り切れる
残り33→11で割り切れる	残り53→11で割り切れない
→143は11で割り切れる。	→273は11で割り切れない。

⇒ 以上により、11は143と273の公約数ではない。

・13で割り切れるかどうかを調べるには:

143=130+13	273=260+13
130→13で割り切れる	260→13で割り切れる
残り13→13で割り切れる	残り13→13で割り切れる
→143は13で割り切れる	→273は13で割り切れる

⇒ 以上により、13は143と273の公約数。

$$\frac{143}{273} = \frac{143^1}{273^1} = \frac{11}{21}$$

21

○

10も14も2で割り切れます。

$$10/14 = 5/7$$

【答案の傾向】

2011.4.8--2011.8.10の期間に寄せられた答案135件について(以下の問題についても同様)

《正答率》 94%でよくできています。

《主な誤答》 特に多い間違いはありませんでした。

(2) $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

採点する やり直す



9も15も3で割り切れます。

$$9/15 = 3/5$$

【答案の傾向】

《正答率》 96%でよくできています。

《主な誤答》 特に多い間違いはありませんでした。

(3) $\frac{30}{18} = \frac{5}{3}$

採点する やり直す



30も18も6で割り切れます。

$$30/18 = 5/3$$

【答案の傾向】

《正答率》 89%でよくできています。

《主な誤答》 $\frac{10}{6}$ という答案が少しありました(まだ約分ができます)

(4) $\frac{70}{105} = \frac{2}{3}$

採点する やり直す



70も105も5, 7で割り切れます。

$$70/105 = 14/21 = 2/3$$

【答案の傾向】

《正答率》 66%でやや下がってきました。

《主な誤答》 $\frac{14}{27}$ という答案が6%ありました(まだ7で約分ができます)

(5) $\frac{84}{210} = \frac{2}{5}$

採点する やり直す



84も210も2, 3, 7で割り切れます。

$$84/210 = 42/105 = 14/35 = 2/5$$

【答案の傾向】

《正答率》 63%に下がりました。

《主な誤答》 $\frac{42}{105}$, $\frac{14}{35}$, $\frac{6}{15}$ やという答案が各々6%, 4%, 4%ありました(まだ約分ができます。7で割れるかどうか確かめないミスが多いようです)

(6) $\frac{210}{180} = \frac{7}{6}$

採点する やり直す



210も180も2, 3, 5で割り切れます。

$$210/180 = 105/90 = 35/30 = 7/6$$

【答案の傾向】

《正答率》 82%でよくできています。

《主な誤答》 特に多い間違いはありませんでした。(2,3,5で割れるかどうかはほとんどの人が確かめるようです。)

(7) $\frac{105}{210} = \frac{1}{2}$

採点する やり直す



105も210も3, 5, 7で割り切れます。

$$105/210 = 35/70 = 7/14 = 1/2$$

【答案の傾向】

《正答率》 72%でよくできています。

《主な誤答》 特に多い間違いはありませんでした。(今回は7で割れるかどうかも多くの人確かめました。)

(8) $\frac{99}{143} = \frac{9}{13}$ (2桁の整数で試してください)

採点する やり直す



143は2, 3, 5, 7で割り切れませんので、11を考えてみると99は11で割り切れます。

次に、 $143=110+33$ と考えると、

110は11で割り切れ、残り33も11で割り切れます。

以上により、99も143も11で割り切れます。

$$99/143 = 9/13$$

【答案の傾向】

《正答率》 45%と半分以下に下がりました。

《主な誤答》 $\frac{99}{143}$ をそのまま答えにした人が13%、白紙答案が13%ありました(11のような2桁の整数で約分するとすると、確かに思いつきにくいようで、どちらかと言えばこれは発展学習になります。)

(9) $\frac{374}{221} = \frac{22}{13}$ (2桁の整数で試してください)

採点する やり直す



2, 3, 5, 7で割り切れませんので、10以上の数字を考えてみる

$374=340+34$ は17で割り切れます。

$221=170+51$ は17で割り切れます。

以上により、374も221も17で割り切れます。

$$374/221 = 22/13$$

【答案の傾向】

《正答率》 27%とほとんどの人が正解に達しません。

《主な誤答》 $\frac{374}{221}$ をそのまま答えにした人が10%、白紙答案が34%ありました(これはもう完全に発展学習で、できなくても落ち込む必要はありませんが、今までに自分が付けた力を出し切れるようにふんばることが大切です。)

(10) $\frac{255}{561} = \frac{5}{11}$ (2桁の整数で試してください)

採点する やり直す



3で割り切れます。

$$255/561 = 85/187$$

次に、

17, 34, 51, 68, 85は17で割り切れます。

$187=170+17$ は17で割り切れます。

以上により、85も187も17で割り切れます。

$$85/187 = 5/11$$

【答案の傾向】

《正答率》 26%とほとんどの人が正解に達しません。

《主な誤答》 $\frac{255}{561}$ をそのまま答えにした人が16%、白紙答案が29%ありました(これはもう完全に発展学習で、できなくても落ち込む必要はありませんが、前の問題で17で割る例を示していますので、それがヒントになります。)