

■展開公式1

基本的な乗法公式(展開公式)

$$\text{[I]} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{[II]} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{[III]} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

[I]の例

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(4x+1)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot 1 + 1^2 = 16x^2 + 8x + 1$$

x だけでなく、係数も2乗することを忘れないこと。

[II]の例

$$(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

x, y だけでなく、係数も2乗することを忘れないこと。

[III]の例

$$(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$$

$$(2x+3y)(2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$$

x, y だけでなく、係数も2乗することを忘れないこと。

$$\text{[IV]} \quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$\text{[V]} \quad (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

[IV]の例

$$(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$$

和が x の係数で、積が定数項になる。(逆にする間違いが多い)

$$(x+4)(x-7) = x^2 + \{4+(-7)\}x + \{4 \cdot (-7)\} = x^2 - 3x - 28$$

$$(x+4y)(x-7y) = x^2 + \{4y+(-7y)\}x + \{4y \cdot (-7y)\} = x^2 - 3xy - 28y^2$$

前の式に y を付けただけと考えると後で困る。係数が $4y, -7y$ だと考えること。

[V]はバラバラにして集める「やりかた」が身に付いておればよく、結果を「覚える」必要はない。

$$(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$$

問題1 次の式を展開せよ。
(下の選択肢から正しいものを選び)

(1) $(x+5)^2$ 解説

$$x^2 + 5x + 10$$

$$x^2 + 5x + 25$$

$$x^2 + 10x + 10$$

$$x^2 + 10x + 25$$

公式 I を使って
 $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
 とします

(2) $(3x-5)^2$ 解説

$$9x^2 - 15x + 25$$

$$9x^2 - 30x + 25$$

$$9x^2 - 15x - 25$$

$$9x^2 - 30x - 25$$

公式 II を使って
 $(3x-5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (-5) + (-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$
 とします

(3) $(3x+5)(3x-5)$ 解説

$$3x^2 - 5$$

$$3x^2 - 25$$

$$9x^2 - 10$$

$$9x^2 - 25$$

公式 III を使って
 $(3x+5)(3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$
 とします

問題2 次の式を展開せよ。
(下の選択肢から正しいものを選び)

(1) $(x+5)(x+1)$ 解説

$$x^2 + 5x + 6$$

$$x^2 + 6x + 5$$

$$2x + 6$$

$$2x + 5$$

公式 IV を使って
 $(x+5)(x+1) = x^2 + (5+1)x + 5 \cdot 1 = x^2 + 6x + 5$
 とします

(2) $(x+7)(x-5)$ 解説

$$x^2 + 2x - 35$$

$$x^2 - 2x - 35$$

$$x^2 + 35x - 2$$

$$x^2 - 35x - 2$$

公式 IV を使って
 $(x+7)(x-5) = x^2 + (7-5)x - 7 \cdot 5 = x^2 + 2x - 35$
 とします

(3) $(x-3)(x-5)$ 解説

$$x^2 - 15x + 8$$

$$x^2 - 15x + 8$$

$$x^2 - 8x + 15$$

$$x^2 - 8x - 15$$

公式 IV を使って
 $(x-3)(x-5) = x^2 + (-3-5)x + (-3) \cdot (-5) = x^2 - 8x + 15$
 とします

(4) $(x-2)(3x+1)$ 解説

$$3x^2 + 7x - 2$$

$$3x^2 + 5x - 2$$

$$3x^2 - 5x - 2$$

$$3x^2 - 5x + 2$$

公式 V は覚えなくても高校は卒業できるし、複雑すぎて覚えるのは無理で、覚えるメリットもない
 単にバラバラにして、1次の係数だけは集めるとよい
 $(x-2)(3x+1) = 3x^2 + x - 6x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$
 とします

[VI] $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

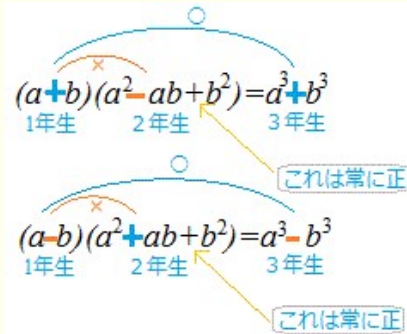
[VII] $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

[VIII] $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

ab の係数が -1 のときのこの公式が使える。
 ab の係数が -2 のときは使えない。

[IX] $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

ab の係数が 1 のときのこの公式が使える。
 ab の係数が 2 のときは使えない。



※こじつけの覚え方:「1年生は2年生と仲が悪い, 1年生と3年生は仲がよい」

[VI]の例

$$(x+1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 + 3^3$$

$$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

係数を2乗, 3乗したものも係数に入ってくる。

[VII]の例

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2x) \cdot 1^2 - 1^3$$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

[VIII][IX]の例

※そもそも, この公式は $(a+b)^3$ とは「#全く関係ない#」ことに注意すること。

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$$

見たらすぐ答え. 特別な計算はいらない。

これを, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ などと変形してはいけない。

$$(2x-1)(4x^2 + 2x + 1) = 8x^3 - 1$$

見たらすぐ答え. 特別な計算はいらない。

これを, $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ などと変形してはいけない。

$$(x+1)(x^2 + x + 1) =$$

公式に当てはまっていない. 気長にばらばらにするだけ.
 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ になる。

$$(x-2)(x^2 + 4x + 4) =$$

公式に当てはまっていない. 気長にばらばらにするだけ.
 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ になる。

問題3 次の式を展開せよ。

(下の選択肢から正しいものを選び。)

(1) $(x+2)^3$ ○ 解説

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 8$$

左の公式[VI]に $a=x, b=2$ を当てはめると

$$x^3 + 6x^2 + 6x + 8$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times 2^2 + 2^3$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \text{ になります}$$

$$x^3 + 12x^2 + 6x + 8$$

(2) $(3x-2)^3$ ○ 解説

$$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

左の公式[VII]に $a=3x, b=2$ を当てはめると

$$27x^3 - 54x^2 - 36x - 8$$

$$(3x-2)^3$$

$$27x^3 - 18x^2 + 18x - 8$$

$$= (3x)^3 - 3 \times (3x)^2 \times 2 + 3 \times (3x) \times 2^2 - 2^3$$

$$27x^3 - 18x^2 - 18x - 8$$

$$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 \text{ になります}$$

(3) $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$ ○ 解説

$$x^3 - 8$$

左の公式[VIII]に $a=x, b=2$ を当てはめると

$$x^3 + 6x^2 + 8x + 8$$

左辺が $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$x^3 + 8$$

→ $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$ となって問題の式と一致するから

$$x^3 - 6x^2 + 8x - 8$$

直ちに公式[VIII]の右辺を答えにします

$$x^3 + 8$$

(4) $(x+1)(x^2 - 2x + 1)$ ○ 解説

$$x^3 + 1$$

この問題では x の係数が -2 となっているために, 公式[VI]の左辺にも,

$$x^3 + x^2 + x + 1$$

[VIII]の左辺にも当てはまりません $(x+1)(x^2 - x + 1)$ でなく

$$x^3 - 1$$

$(x+1)(x^2 - 2x + 1)$ になっている

$$x^3 - x^2 - x + 1$$

したがって, 単純にバラバラに展開する他ありません

$$(x+1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$= (x^3 - 2x^2 + x) + (x^2 - 2x + 1)$$

$$= x^3 - x^2 - x + 1$$